



晶体的结构

2. 晶体结构实例，晶体对称性和物性

冯济

2026 年 3 月 14 日

北京大学 物理学院
量子材料科学中心

目录

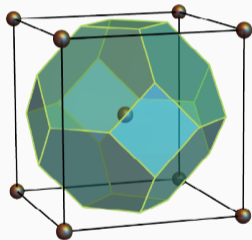
1. 晶体结构实例
2. 晶体学点群和空间群
3. 晶体物性与对称性



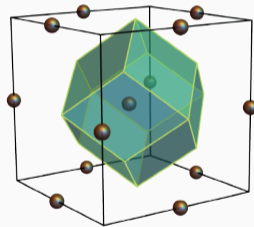
晶体结构实例

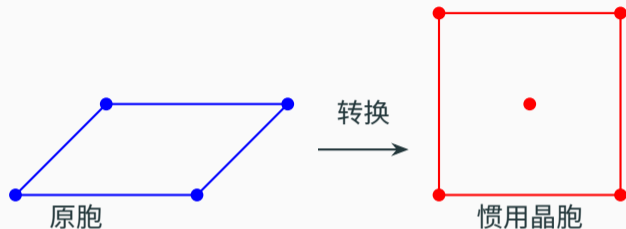
立方晶格：体心立方和面心立方

体心立方格子
维格纳赛茨原胞
为截角正八面体



面心立方格子
维格纳赛茨原胞
为菱形12面体





为什么使用惯用晶胞？

- **直观展示：**比原胞更能体现晶体的宏观对称性
- **操作简便：**通常具有更高对称性的形状（立方、六方等）
- **标准描述：**约定俗成的晶体学表示方法
- **多格点：**可包含多个原子/格点，反映真实结构

惯用晶胞的选取原则

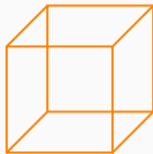
核心原则

1. **对称性优先**: 形状符合晶体点群对称性
2. **高对称轴**: 基矢尽量沿高对称方向
3. **直角优先**: 夹角尽量接近 90° (如可能)
4. **最小重复**: 体积尽可能小 (在满足对称性前提下)

特殊情况

如果原胞本身满足上述所有条件, 则原胞直接作为惯用晶胞

立方惯用晶胞



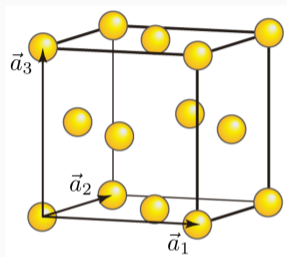
六方惯用晶胞



实际应用

- 立方晶系: 立方体
- 六方晶系: 六方柱
- 正交晶系: 长方体
- 三方晶系: 菱形六面体

面心立方晶格的惯用晶胞



面心立方 (fcc) 惯用晶胞
基矢

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

惯用晶胞的体积: $V_{\text{惯}} = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \det A_{\text{惯}} = a^3$, 其中

$$A_{\text{惯}} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

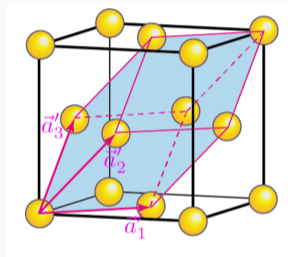
惯用晶胞基元:

$$\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1,2,3} \vec{a}_i x_{i\alpha} = A_{\text{惯}} \vec{x}_\alpha,$$

其中 $\alpha = 1, 2, 3, 4$, \vec{x}_α 是基元中原子 α 的分数坐标

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

面心立方晶格的原胞



面心立方 (fcc) 原胞

$$\text{原胞体积: } V_{\text{原}} = \vec{a}'_1 \cdot \vec{a}'_2 \times \vec{a}'_3 = \\ \det A_{\text{原}} = \frac{1}{4} a^3$$

原胞的基矢可以写作惯用晶胞的线性组合

$$\vec{a}'_1 = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_3) = \begin{bmatrix} a/2 & a/2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\vec{a}'_2 = \frac{1}{2}(\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \begin{bmatrix} 0 & a/2 & a/2 \end{bmatrix}^T$$

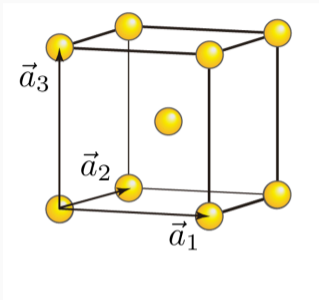
$$\vec{a}'_3 = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \begin{bmatrix} a/2 & a/2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

基矢的变换也可以写为 A 矩阵的线性变换

$$A_{\text{原}} = [\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3] = A_{\text{惯}} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A_{\text{惯}} P$$

$$\det A_{\text{原}} = \det P \det A_{\text{惯}} = \frac{1}{4} \det A_{\text{惯}}$$

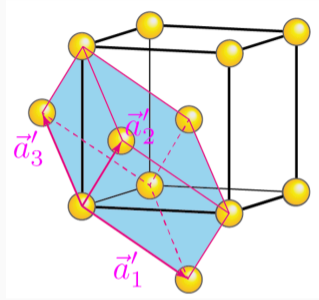
体心立方晶格的原胞和惯用晶胞



体心立方 (bcc) 惯用晶胞

基矢: $\vec{a}_1 = a\hat{x}$, $\vec{a}_2 = a\hat{y}$, $\vec{a}_3 = a\hat{z}$

基元: $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$



体心立方 (bcc) 原胞

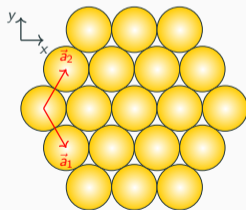
$$\vec{a}'_1 = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3)$$

$$\vec{a}'_2 = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3)$$

$$\vec{a}'_3 = \frac{1}{2}(-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)$$

密堆积结构

- 面心立方结构 (每个格点一个原子) 又称为立方密堆积结构
- **密堆积结构**: 将相同大小的球体在空间中排列, 使其占据最大体积分数的方式
- 密堆积自然界中常见的原子排列方式, 最高堆积密度体积分数为 74.05%



- 三维密堆积结构由二维密堆积单层堆积而成
- 二维密堆积可以是以小球直径为晶胞参数 a 的二维六方晶格

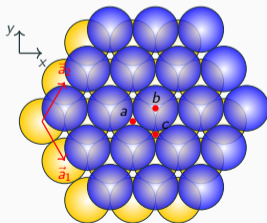
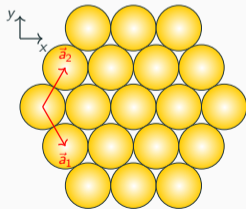
$$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y}$$

- 每个格点上有一个小球 (原子)

密堆积结构

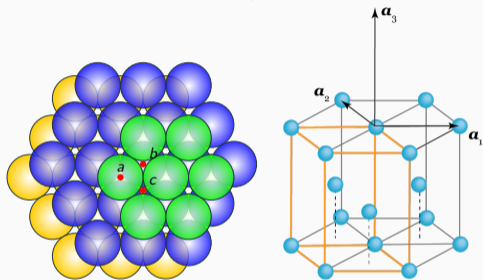
- 为了最小化两层之间的原子间隙，下一层原子对齐第一层的空隙位
- 如此构造的两层出现了三个特殊的位置: a 、 b 、 c
- 下一个密堆积层可以出现在 a 或 c 位



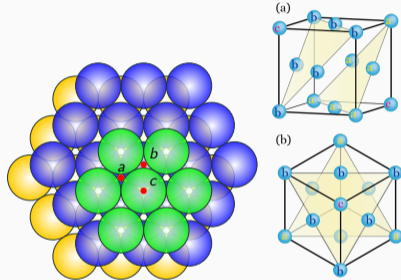
- 第一层原子位置
- 第二层原子位置
- 两层原子空隙对齐处

密堆积结构

aba 堆叠



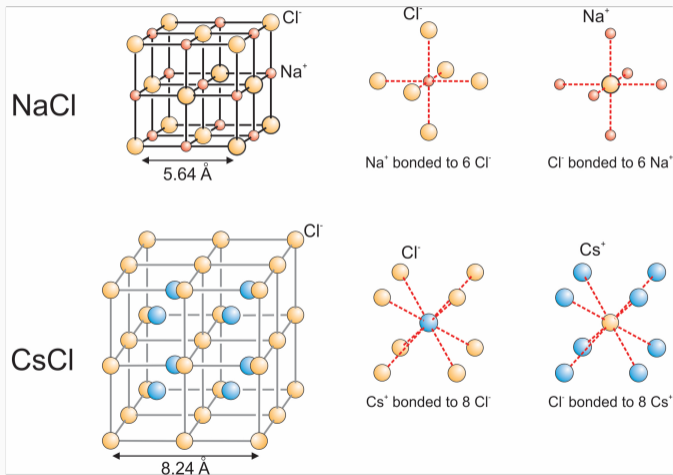
abc 堆叠



- 将 aba 堆叠周期延拓为 $ababab\cdots$ ，形成的三维晶格具有六重旋转对称性，称为六方密堆 (hexagonal close-packed, HCP) 结构
- 将 abc 堆叠周期延拓为 $abcabc\cdots$ ，形成的三维晶格具有立方对称性，称为立方密堆 (cubic close-packed, CCP) 结构，也就是面心立方 (FCC) 晶格
- 也可以通过其他堆叠方式形成更为复杂的三维密堆积

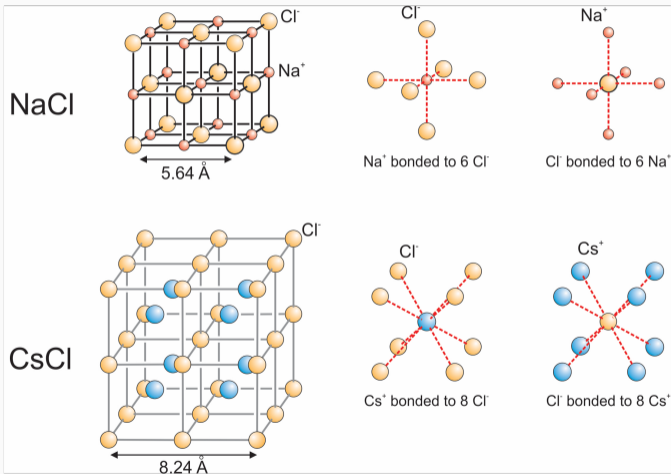
立方晶体结构示例：氯化钠和氯化铯结构

- NaCl 为离子晶体，具有__晶格. 惯用晶胞含__个 NaCl 单元
 - ▶ 阳离子 Na^+ 离子半径为 0.95\AA
 - ▶ 阴离子 Cl^- 离子半径为 1.81\AA
 - ▶ 氯离子在钠离子周围形成正八面体配位，反之亦然
- CsCl 为离子晶体，具有____晶格. 惯用晶胞含__个 CsCl 单元
 - ▶ 阳离子 Cs^+ 离子半径为 1.69\AA
 - ▶ 阴离子 Cl^- 离子半径为 1.81\AA
 - ▶ 氯离子在铯离子周围形成正立方体配位，反之亦然

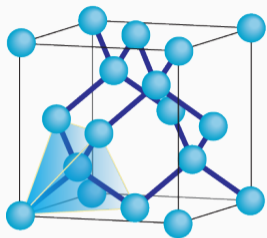


立方晶体结构示例：氯化钠和氯化铯结构

- NaCl 为离子晶体，具有 FCC 晶格. 惯用晶胞含 4 个 NaCl 单元
 - 阳离子 Na^+ 离子半径为 0.95\AA
 - 阴离子 Cl^- 离子半径为 1.81\AA
 - 氯离子在钠离子周围形成正八面体配位，反之亦然
- CsCl 为离子晶体，具有简单立方晶格. 惯用晶胞含 1 个 CsCl 单元
 - 阳离子 Cs^+ 离子半径为 1.69\AA
 - 阴离子 Cl^- 离子半径为 1.81\AA
 - 氯离子在铯离子周围形成正立方体配位，反之亦然



金刚石结构



金刚石 (diamond) 结构

- **化学组成:** 纯碳原子
- **晶体系统:** 面心立方 (FCC)
- **空间群:** $Fd\bar{3}m$ (No. 227)
- **配位数:** 4 (四面体配位)
- **键角:** 109.5°

- 惯用晶胞的基元含 8 个碳原子

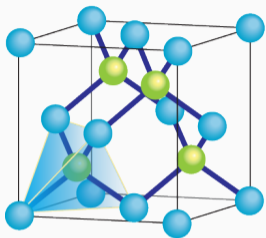
$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, x_6 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, x_7 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}, x_8 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

- 可以看作是两套 FCC 晶格, 通过 $[1/4, 1/4, 1/4]^T$ 平移相互转化
- 单质碳、硅、锗具有相同晶体结构



闪锌矿结构



闪锌矿 (zinc blende) 结构

- **化学组成:** ZnS
- **晶体系统:** 面心立方 (FCC)
- **空间群:** $F4\bar{3}m$ (No. 216)
- **配位数:** 4 (四面体配位)
- **键长:** 1.54 Å, **键角:** 109.5°

- 惯用晶胞的基元含 8 个原子

锌: $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

硫: $x_5 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, x_6 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, x_7 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}, x_8 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$

- 可以看作是两套 FCC 晶格, 通过 $[1/4, 1/4, 1/4]^T$ 平移相互转化
- GaAs, CdTe 等半导体具有闪锌矿结构

晶体学点群和空间群

一般的几何对称变换

- 晶体具有平移对称性. 考察晶体对称性, 需要考虑更一般的**保距变换**

$$[\alpha, \vec{t}]\vec{r} = \alpha(\vec{r}) + \vec{t} \quad (1)$$

- 变换的合成: 乘法

$$[\alpha, \vec{t}][\beta, \vec{s}] = [\alpha\beta, \alpha\vec{s} + \vec{t}] \quad (2)$$

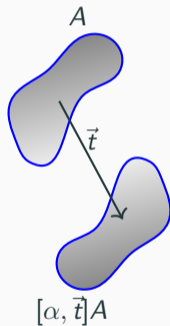
- 逆变换:

$$[\alpha, \vec{t}]^{-1} = [\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\vec{t}] \quad (3)$$

- 布拉维格子的平移对称性形成一个群, 称为**平移群**

$$[e, \vec{R}_1][e, \vec{R}_2] = [e, \vec{R}_1 + \vec{R}_2] \quad (4)$$

- 所有的平移对易, 所以**平移群是阿贝尔群**



晶体学限制定理

- **晶体学限制定理**: 晶体的旋转对称性通常被限制为 2 重, 3 重, 4 重, 6 重
- 对于任意的旋转 α , 在笛卡尔基下: $\text{tr } M(\alpha) = \pm(1 + 2 \cos \phi)$; ϕ 为转角, \pm 对应纯/瑕旋转
- 以晶体的基矢为基, 格矢为整数系数矢量 $\tilde{R} = [n_1, n_2, n_3]^T$
- 如果布拉维格子在 α 下保持不变, $\tilde{R}' = \tilde{M}(\alpha)\tilde{R}$, 则在格矢基下, $\tilde{M}(\alpha)$ 为整数矩阵
- 矩阵的迹为不变量, 与基的选取无关: $\text{tr } M(\alpha) = \text{tr } \tilde{M}(\alpha) = \text{整数}$, 因此 $1 + 2 \cos \phi$ 为整数

$$\phi = \frac{2\pi}{p}, p = 1, 2, 3, 4, 6 \quad (5)$$

这说明在晶体中, 旋转的角度 ϕ 不是任意的, 其取值受到平移对称的限制



非点式对称性

- **非点式对称性**, 也称为**非简单对称性**, 是指晶体对称操作中, 那些不能被分解为一个单纯的点群操作 (旋转、反射、反演) 与一个晶格平移的简单组合的对称性

$$g = [\alpha, \vec{t}], \vec{t} \neq \vec{R}, \alpha \neq e \quad (6)$$

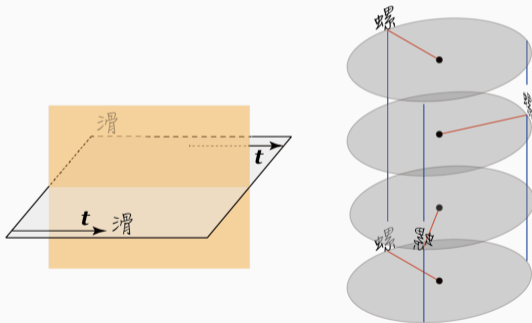
- 显然, $\alpha \neq i$. 所以 α 为 $C_p(\hat{n})$ 或者 $\sigma(\hat{n})$. 可以用 \hat{n} 分解平移矢量 $\vec{t} = \vec{t}_\perp + \vec{t}_\parallel$
- 令 p 为 α 的阶数, $\alpha^p = e$, 可以得到 $g^p = [e, (\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \dots + e)\vec{t}_\perp + p\vec{t}_\parallel] = [e, p\vec{t}_\parallel]$
- 因此, $pt_\parallel = \vec{R} \Rightarrow \vec{t}_\parallel = n\vec{R}/p$, n 为整数
- 可以验证, \vec{t}_\perp 总可以通过适当的坐标变换消除. 因此非点式对称性的具有如下形式

$$g = [\alpha, n\vec{R}/p], n = 1, 2, \dots, p-1 \quad (7)$$



非点式对称性

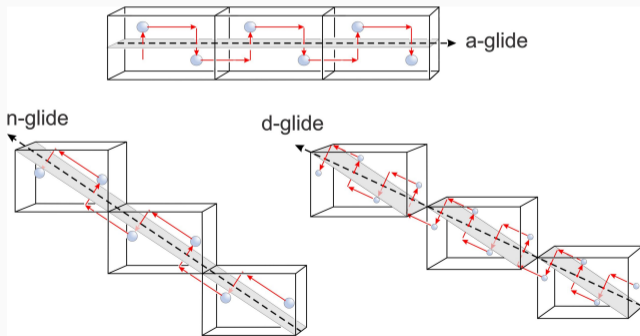
- 如果 $\alpha = m$, 非点式对称性为**滑移面**, $p = 2$. 国际记号为 a, b, c, d, n
- 如果 $\alpha = C_p$, $p = 2, 3, 4, 6$, 非点式对称性为**螺旋轴**. 国际记号为 p_n



(左) 滑移面和 (右) 螺旋轴

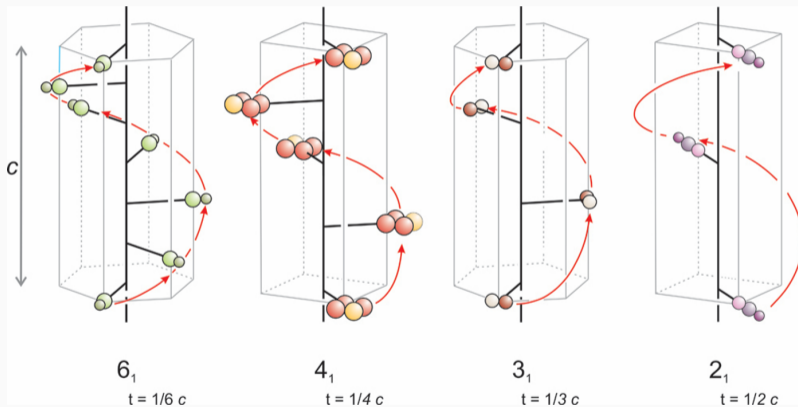
滑移面

- a -滑移面: 平移 $\vec{t} = \vec{a}/2$. b, c 定义类同
- n -滑移面: 平移沿面对角线方向
- d -滑移面: 平移 $\vec{t} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/4$. d 来自于 diamond, 因为见于金刚石结构中



图源: opengeology.org

螺旋轴



图源: opengeology.org

晶体学点群

- 晶体学中, 晶体学点群是指晶体中所有点群对称性的集合. 由于晶体学限制定理, 晶体的点群是有限的, 三维的晶体点群共 32 个
- 两种命名约定体系: **熊夫利记号**和**赫尔曼-莫甘记号**
 - ▶ 熊夫利记号 (Schoenflies notation): 得名于德国数学家 Arthur Moritz Schoenflies, 如 C_{3v} , D_{3h} , T_d , O_h 等等
 - ▶ 赫尔曼-莫甘记号 (Hermann-Mauguin notation): 得名于德国晶体学家赫尔曼·卡尔 (Carl Hermann, 于 1928 年提出) 和法国矿物学家查尔斯-维克多克·莫甘 (Charles-Victor Mauguin 于 1931 年修改). 与上列熊夫利记号对应的点群为 $3m$, $\bar{6}m2$, $4\bar{3}m$, $m\bar{3}m$ 等等
- 1935 年, 在《国际晶体学手册》(International Tables For Crystallography)发表第一版时, 赫尔曼-莫甘记号被采用为标准记法, 因而赫尔曼-莫甘记号也被称作**国际记号**
- 赫尔曼-莫甘记号 (国际记号) 在晶体学中更加常用: 赫尔曼-莫甘记号更易于包含平移对称的元素, 且指定了对称轴的方向
- 熊夫利记号常用于光谱学研究领域



- 赫尔曼-莫甘 (H-M) 记号适用于点群和空间群. 此处先简介点群的命名法则
- 点群对称元的 H-M 符号:
 - ▶ 数字 p , $p = 1, 2, 3, \dots$, 为 p 重 (纯) 旋转轴
 - ▶ 字母 m 代表镜面
 - ▶ $\bar{1}$ (“1 bar”) 为反演中心
 - ▶ 数字 $\bar{p} = i \circ C_p$, $p = 3, 4, 5, 8, \dots$. 若 p 为偶数, 则 p 必须是 4 的倍数. $\bar{2} = m$. 若 p 为奇数, $\bar{p} = S_{2p}$
- 符号的组合
 - ▶ 旋转轴和与之平行的镜面: pm . 例如: $2m, 3m, 4m, \dots$
 - ▶ 旋转轴和与之垂直的镜面, p/m 或者 $\frac{p}{m}$. 例如: $2/m, 3/m, 4/m, \dots$
 - ▶ 记号 $2mm$ 代表 2 重旋转轴和 2 个与之平行的镜面, 两个镜面互相平行
 - ▶ 记号 $4mm$ 代表 4 重旋转轴和 4 个与之平行的镜面, 镜面之间成 45 度/90 度夹角
 - ▶ 记号 $3m$ 代表 3 重旋转轴和 3 个与之平行的镜面, 镜面之间成 120 度夹角



七大晶系

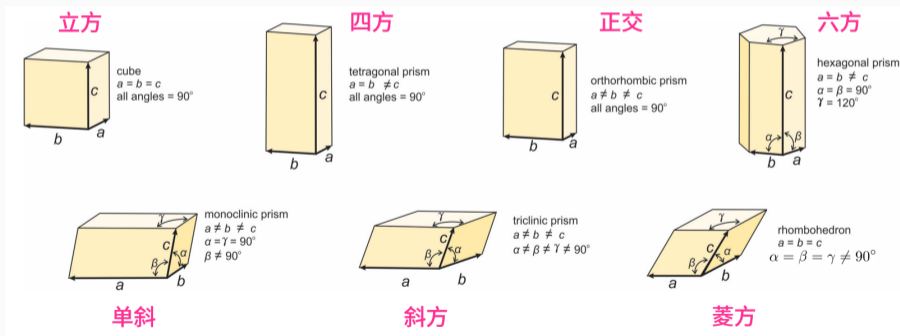
根据晶体学点群的最高旋转对称，可以将所有的晶体分为7大晶系：立方晶系，六方晶系，菱方晶系，四方晶系，正交晶系，单斜晶系，三斜晶系

晶系	允许的晶体学点群
三斜	$1, \bar{1}$
单斜	$2, m, 2/m$
正交	$222, mm2, mmm$
菱方	$3, \bar{3}, 32, 3m, \bar{3}m$
四方	$4, \bar{4}, 4/m, 422, 4mm, \bar{4}2m, 4/mmm$
六方	$6, \bar{6}, 6/m, 622, 6mm, \bar{6}m2, 6/mmm$
立方	$23, m\bar{3}, 432, \bar{4}3m, m\bar{3}m$

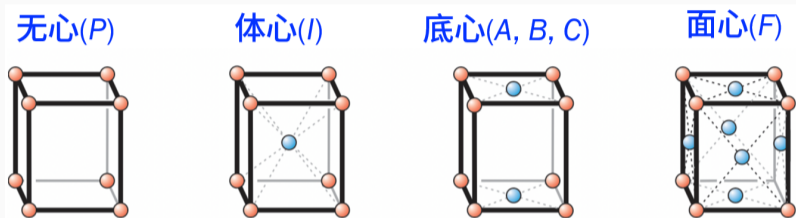


七大晶系

- 每种晶系的晶胞可以具有特定的形状: 晶体点群对称性决定了基矢的长度和夹角的关系
- 但是单看晶胞的形状本身并不能反映晶体的对称性. 具体的对称性需要结合基元决定



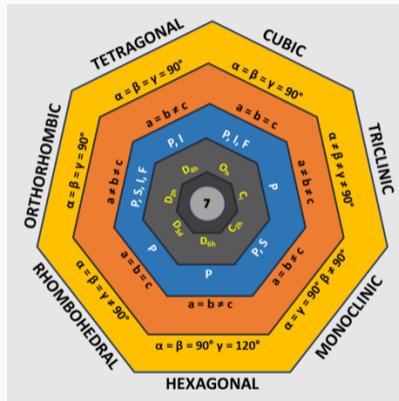
布拉维格子“加心”



- 根据 7 大晶系确定的原胞形状, 还可以通过加心来构造不可约化的布拉维格子.
- 三种加心方式: 体心 (I), 底心 (A, B, C), 面心 (F)
- 三维布拉维格子的分类最早由德国晶体学家莫瑞兹·弗兰肯海姆在 1842 年提出. 不过他给出 15 种不等价的三维格子.
- 1845 年, 法国物理学家奥古斯特·布拉维 14 给出了正确的分类, 因此称为布拉维格子.

14 种布拉维格子

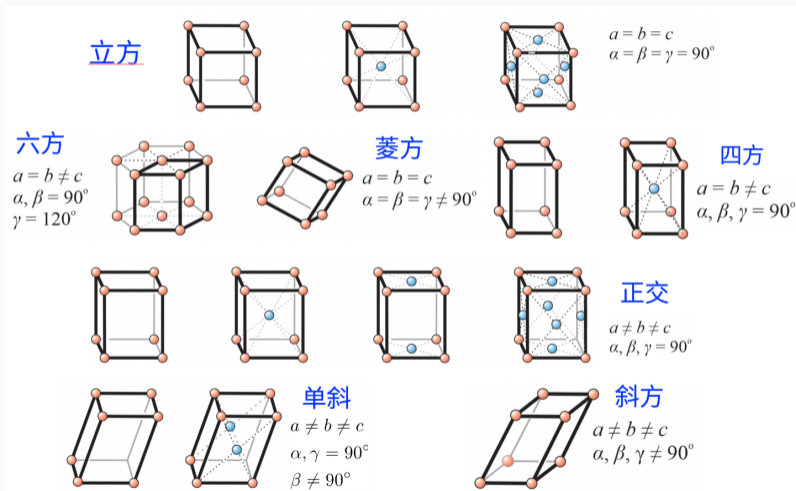
- 考虑对称性, 总共有 14 种不等价的三维布拉维格子.
- 三维布拉维格子的分类最早由德国晶体学家莫瑞兹·弗兰肯海姆在 1842 年提出. 不过他给出 15 种不等价的三维格子.
- 1845 年, 法国物理学家奥古斯特·布拉维 14 给出了正确的分类, 因此称为布拉维格子.



图片来源: 维某基

Historical introduction. Mois I. Aroyo, Ulrich Müller and Hans Wondratschek. *International Tables for Crystallography* (2006). Vol. A1.

14 种布拉维格子



图源: opengeology.org

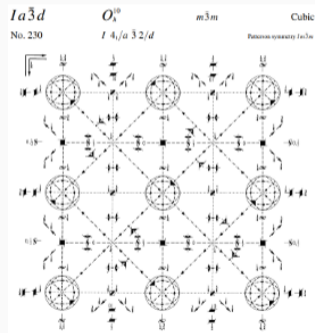


空间群

- 晶体具有平移、点式和非点式转动对称性，满足结合律，且具有逆元，因此转动、平移对称性的集合，可以形成对称群，称为晶体的**空间群**。
- 230 个空间群分为两类。**点式空间群**所有对称操作均为 $[\alpha, \vec{R}]$ ，也称为**简单空间群**，共有 73 个。剩下的 157 个空间群，一定具有不可约化的 $[\alpha, n\vec{R}/p]$ 非点式对称性，称为**非点式空间群**，或者**非简单空间群**。
- 空间群的名称的有两种格式，完整格式和简写格式。例如：第 230 号空间群的名称为

$$I\frac{4_1}{a}\frac{3}{d}\frac{2}{d} \sim I4_1\bar{3}2$$

- 空间群信息：International Tables for Crystallography A,
<http://img.chem.ucl.ac.uk/sgp/LARGE/sgp.htm>



晶体物性与对称性

- 晶体的物性可以用张量描述
- 以晶体的直流电极化为例

$$P_a = \epsilon_a^{(0)} + \epsilon_{ab}^{(1)} E_b + \epsilon_{abc}^{(2)} E_b E_c + \dots$$

指标 $a, b, c = 1, 2, 3$, 对应三个独立的基矢. 采用爱因斯坦求和惯例, 对重复指标求和

- ▶ 零阶系数 $\epsilon^{(0)}$ 是一阶张量, 也就是矢量, 对应了体系的自发电极化. 具有自发电极化 $\epsilon^{(0)} \neq 0$ 的晶体称为铁电材料
- ▶ 一阶响应系数 $\epsilon^{(1)}$ 是二阶张量

$$\epsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

- ▶ 以此类推, n 阶响应系数 $\epsilon^{(n)}$ 是 $n+1$ 阶张量

诺埃曼原理 (Neumann's Principle)

- **诺埃曼原理**: 晶体的任何物理性质必须至少具有晶体点群的全部对称性
- 考虑宏观极矢量物性 \vec{A} , 如自发电极化 $\epsilon^{(0)}$. 诺埃曼原理要求 \vec{A} 满足晶体点群 G 的全部对称性 *

$$\alpha\vec{A} = \vec{A}, \forall \alpha \in G \quad (8)$$

[* 严格讲 $\alpha\vec{A} = \vec{A} + \vec{Q}$, 其中 \vec{Q} 是一个由晶格平移产生的量子化矢量. Phys. Rev. B 48, 4442 (1993).]

- 对于纯旋转群 p , $p = 2, 3, 4, 6$, 设全转轴为 z 轴:

$$M(\alpha)\vec{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cA_x - sA_y \\ sA_x + cA_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

可见该晶体可以有非零 A , 但仅限于转动轴方向

- 如果晶体还具有垂直于 z 轴的 2 重轴 ($222, 32$ 等) 或者镜面 ($2/m, 6/m$), 可以推断

$$A = 0$$



二阶张量

- 考虑物理量 \vec{A} 对外场矢量外场 \vec{F} 的线性响应: $\delta\vec{A} = \tau\vec{F}$, 其中线性响应系数 τ 为二阶张量. 在旋转 α 的作用下

$$\delta\vec{A}' = M(\alpha)\delta\vec{A}, \vec{F}' = M(\alpha)\vec{F}$$

$$\delta\vec{A}' = M(\alpha)\tau M(\alpha)^{-1}\vec{F}'$$

就是说, 旋转后的响应系数为

$$\tau' = M(\alpha)\tau M(\alpha)^{-1}$$

- 如果 $\alpha \in G$, 则张量 τ 的诺埃曼原理为

$$\alpha\tau = \tau, \forall \alpha \in G \tag{9}$$



谢谢!